# 生産関数と生産可能性曲線


植松, 忠博


植松, 忠博. 生産関数と生産可能性曲線. 經濟論叢 1971, 108(1): 60-67


1971-07


https://doi.org/10.14989/133420

# 經濟論叢

第108巻　第1号



昭和46年7月

京都大學經濟學會

《研究ノート》

# 生産関数と生産可能性曲線

植　松　忠　博

## は し が き

与えられた資源と技術の制約のもとでひとつの社会が享受しうる生産物の種々の組合わせは，生産物空間に描かれる生産可能性曲線によって表現される。その基礎にあるものは社会の個々の生産単位（産業または企業）の生産関数である。ところで企業の生産関数については，たとえば Hicks「価値と資本」にみられるように，それが規模について収穫逓減であり，かつ smooth な curvature をもったものであることがアプリオリに前提されて議論されることが多い。その場合には，古谷弘「現代経済学」（新版）の芳賀の注に証明があるように，生産可能性曲線も原点に凹な smooth な曲線になる。しかし，個々の企業の生産関数がそのような形状であるアプリオリな保証はない。他方，産業の生産関数については規模について収穫一定が仮定されることが多く，Black〔2〕はこの仮定のもとで生産可能性曲線が原点に凹になることを証明している。これに対しても産業の生産関数が収穫一定になるアプリオリな保証はないであろう。かくて個別的な生産関数と生産可能性曲線との関係について，より包括的な検討が必要となるであろう。黒岩［5］，14～15頁にはこれがあるが，なお完全に包括的ではないと思われる。本稿は，1次同次に限らず任意の同次関数が homothetic になることをレンマにすえ，収穫逓増を含む任意の同次関数について生産可能性曲線の形状を規定する条件を幾何学的証明を使って明示したものである。

### 社会的変形関数の導出と生産可能性曲線の形状

はじめに一般的定式化を行なって変形関数の導出可能性を示し，次に単純なモデルを使って，変形関数の形状を検討しよう。

一般に，生産関数が与えられた時に社会的変形関数を導出する過程は，以下のようである[1)]。

いま $m$ 種の生産要素を使って $n$ 種の最終生産物を生産するとして陽関数の形で与え

1）この社会的変形関数の導出については，Graaff〔3〕, pp. 28-29 を参照。

られた各生産物の生産関数を

$$Y_i = F_i(x_{1i} \dots x_{mi}) \qquad (i=1 \dots n)$$
$$X_j = \sum_i x_{ji} \qquad (j=1 \dots m)$$

とする。

社会的にみた効率的生産 efficient production の条件は，各投入と任意の一生産物（たとえば第1財）を除く産出水準を一定にして，第1財の産出を極大にすることだから，Lagrangian

$$L \equiv \sum_i \mu_i F_i + \sum \lambda_j (X_j - \sum_i x_{ji})$$

の極大条件として表わせる。

この1階の条件により

$$\mu_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{ji}} = \lambda_j \quad \begin{pmatrix} i=1 \dots n \\ j=1 \dots m \end{pmatrix} \qquad \text{ただし } \mu_1 \equiv 1$$

となる。

この式の両辺に $dx_{ji}$ を乗じて $i$ と $j$ について集計すれば，

$$\sum_i \mu_i dY_i - \sum_j \lambda_j dX_j = 0$$

となり，$\mu_1 \equiv 1$ を代入すると

$$dY_1 = -\Big[\sum_{i \neq 1} \mu_i dY_i + \sum_j \lambda_j(-dX_j)\Big]$$

ここで可積分条件がみたされているとすれば，

$$dF = -\Big[\sum_{i \neq 1} \mu_i dY_i + \sum_j \lambda_j(-dX_j)\Big]$$

となる関数

$$Y_1 - F(Y_2, \dots, Y_n, -X_1, \dots, -X_m) = T(Y_1 \dots Y_n, X_1 \dots X_m) = 0$$

が存在する。

これが社会的変形関数である。

以上で生産関数が与えられると，社会的変形関数が存在しうることが明らかにされた。では生産関数にどのような制約を与えると，任意の2財の限界代替率が逓増的な変形関数が提出されるだろうか。それを2要素2生産物の単純モデルに，同次生産関数，要素の限界代替率逓減というワクをはめた上で検討しよう。

〔仮定〕

1. 2生産要素 $x_1, x_2$ を用いて2財 $y_1, y_2$ を生産する。
2. 各生産関数

$$y_1 = f_1(x_{11}, x_{21})$$
$$y_2 = f_2(x_{12}, x_{22})$$

ただし $x_1=x_{11}+x_{12}$

$x_2=x_{21}+x_{22}$

は任意の同次関数とする。

3. 2要素の限界代替率は逓減的であるとする。

〔補助定理1〕

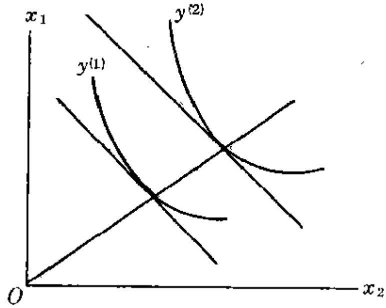
2要素→1生産物の生産関数が同次関数ならば，それは homothetic な生産関数である。

証明

homothetic な生産関数は

$$y=F[f(x_1x_2)]$$

（ただし $f$ は1次同次，$F$ は単調変換）と定義され，第1図のように要素の限界代替率が要素集約度 $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ にのみ依存し，産出量水準に依存しないような生産関数である。




第 1 図

いま，生産関数

$$y=f(x_1,\ x_2)$$

が $n$ 次同次関数とすれば，オイラーの定理により，

$$y=x_2^nf\left(\frac{x_1}{x_2},\ 1\right)=x_2^n\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{1}$$

とかける。$\left(\text{ただし，} f\left(\frac{x_1}{x_2},\ 1\right)=\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right)$

(1)式を $x_1$ と $x_2$ でそれぞれ偏微分して限界代替率を求めると，

$$-\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{fx_2}{fx_1}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)-n\left\{\frac{\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\varphi'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}\right\}=\phi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

となって，$n$ 次同次関数が homothetic なタイプをとることが明らかになる。

〔補助定理2〕

2要素→1生産物の2つの生産関数が homothetic な生産関数で，要素の限界代替率がそれぞれのケースで逓減的であれば，2財の生産の効率的軌跡 efficiency locus は，単調な convex function 又は concave function である。

証明

2つの要素総量がそれぞれ一定のとき，最適な2財 ($y_1$, $y_2$) の生産を実現する，各投入の組合わせは，

$$\max\ y_1=f_1(x_{11},\ x_{21})$$

$$\text{sub. to}\ \begin{cases} f(x_{12},\ x_{22})=\overline{y}_2 \\ x_{11}+x_{12}=\overline{x}_1,\ x_{21}+x_{22}=\overline{x}_2 \end{cases}$$

として，次のような Lagrangian で表わせる。

$$L\equiv f_1(x_{11},\ x_{21})-\lambda_1[f_2(x_{12},\ x_{22})-\overline{y}_2]$$
$$-\lambda_2(x_{11}+x_{21}-\overline{x}_1)-\lambda_3(x_{12}+x_{22}-\overline{x}_2)$$

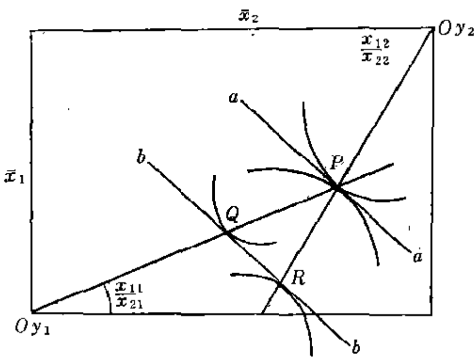
この1階の条件より

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{11}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{21}}}=\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{12}}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{22}}}$$

これは，最適な生産を実現する点が，2つの等量曲線の接点であることを示している。これらの点の集合を効率的軌跡[2]とよぼう。この軌跡は，2つの homothetic 生産関数の要素集約度の相対的な関係に従って，次のような形状をとる。

(イ) $y_1$ 財の生産における要素集約度$\left(\frac{x_{11}}{x_{21}}\right)$が $y_2$ 財の生産におけるそれ$\left(\frac{x_{12}}{x_{22}}\right)$より小さい場合

いま任意の効率的軌跡上の点$P$をとり，$Oy_1P$ 上と $Oy_2P$ の延長上とに同一の接線 $bb$ に接するような点 $Q$, $R$ を，それぞれとる。



第 2 図

各等量曲線はそれぞれ homothetic で，しかも限界代替率が逓減的（原点に凸）であるから，点 $P$ と $Q$, $R$ における接線 ($aa$ と $bb$) は平行で，しかも $Q$ と $R$ とを通る等量曲線は，互に決して交叉しない。従って $bb$ 上で接しあう $y_1$ と $y_2$ との等量曲線は，その接点を必ず $QR$ の中間に位置せしめるであろう。

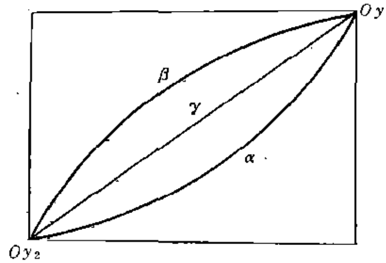
このことが任意の等量曲線について成立するから，結局，効率的軌跡は，第3図の(a)

2) efficiency locus というタームは，Bator〔1〕によっている。

のような単調な convex function になるであろう。

(ロ)反対に $y_1$ 財の生産における要素集約度が $y_2$ 財の生産における要素集約度より大きければ，まったく同じ推論によって，第3図の $(\beta)$ のような単調な concave function の形をもつ効率的軌跡が描ける。

(ハ)要素集約度が等しい場合には，効率的軌跡が $Oy_1Oy_2$ を結ぶ直線になることは明らかである。




第 3 図

〔定式〕

2要素 $(x_1, x_2)$ による2財 $(y_1, y_2)$ の生産可能性曲線 production possibility frontier は，要素集約度の比較と，規模の収穫性とにもとづいて次のような形状に分類できる。

1) 要素集約度が異なる場合

イ）両方とも収穫逓減。両方とも収穫一定。
又は一方が収穫逓減で他方が収穫一定。

→原点に凹

ロ）両方とも収穫逓増。一方が収穫逓増で他方が収穫逓減又は収穫一定。

→原点に凸又は凹

2) 要素集約度が等しい場合

イ）両方とも収穫逓減。一方が収穫逓減で他方が収穫一定。

→原点に凹

ロ）両方とも収穫一定。

→直線

ハ）両方とも収穫逓増。一方が収穫逓増で他方が収穫一定。

→原点に凸

ニ）一方が収穫逓増で他方が収穫逓減。

→原点に凸又は凹

証明[3]

すべてのケースについて証明する必要はないので，代表的なケースについてのみ証明

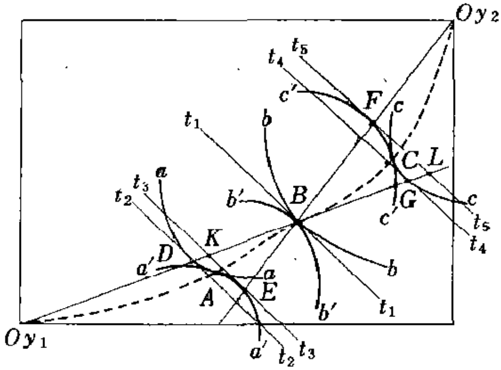
3) 第4図は Black〔2〕の創始にかかるが，彼の証明は生産関数が1次同次の場合に限られ，Houck〔4〕が収穫逓減の場合を含めた。本稿は収穫逓増の場合をも含めている。

しておこう。

第4図は1）のイ）要素集約度が異なり，両方とも収穫一定（生産関数が1次同次）のケースをとりあげたものである。

$Oy_1 \cdot A \cdot B \cdot C \cdot Oy_2$ は効率的軌跡を表わしているとする。

$aDAa$, $bBb$, $cCGc$ は $y_1$ 財の等量曲線であり，産出レベルを等間隔にとってある。1次同次の仮定によって，図において $DB=BG$ である。




第　4　図

$t_1t_1, \ldots, t_5t_5$ を $B$. $D$. $E$. $G$. $F$. 点での限界代替率を表わす直線とすれば，生産関数が homothetic であるという仮定によって，

$$t_1t_1 \parallel t_2t_2 \parallel t_4t_4$$

$$t_1t_1 \parallel t_3t_3 \parallel t_5t_5$$

となって，これらすべての直線は互いに平行である。

しかも $y_1$, $y_2$ の生産における要素の限界代替率は逓減的，すなわち各等量曲線は原点に凸と仮定してあるから，$t_3Et_3$ は $AB$ の間を通り，$t_5Ft_5$ は曲線 $BC$ の延長上で効率的軌跡と交叉する。（交点L）従って，

$$BD>BK,\ BL>BG$$

$$\therefore\ BL>BK$$

しかるに $\triangle BKE$ と $\triangle BLF$ とは相似だから

$$BF:BE=BL:BK$$

$$\therefore\ BF>BE$$

この最後の式は何を示しているだろうか。それは，$y_2$ の生産が収穫一定ならば，$BF$ の産出隔差の方が $EB$ の産出隔差よりも大きいことを示している。ついでに言えば，$y_2$ の生産が収穫逓減に従っていれば，（収穫一定の場合より一層大きな割合で）$BF$ の産出隔差が $EB$ の産出隔差よりも大きいことを示している。もし $y_2$ の生産が収穫逓増に従っているならば，$BF$ の産出隔差と $EB$ の産出隔差との大小はいちがいには言えなくなってくる。（収穫逓増の程度，すなわち62頁(1)式の $n$ の大きさに依存するであろう）

さて，相方とも1次同次の生産関数の場合にもどると，図から明らかなように，$y_1$ 財

の生産については $D$ と $A$, $C$ と $G$ は同じ産出レベルにあり，$y_2$ 財については $A$ と $E$, $F$ と $C$ とは同じ産出レベルにある。従って，いま $A \to B \to C$ へ最適産出のレベルを変えると，$AB$ から $BC$ へ $y_1$ 財の生産を同じ規模だけ増加する ($BD=GB$) 時に，$y_2$ 財の生産は $BE<BF$ に従って，より大きな規模で減少しなければならない。すなわち，一方の財の生産を同単位ずつ増加していく時，他方の財の生産は累積的に大きな規模で減少しなければならない。

それは言いかえれば，$y_1$, $y_2$ 財の生産における生産物の限界代替率が逓増的（生産可能性曲線が原点に凹）であることを示している。

上の証明は，2財の生産が収穫逓減に従っているケース，収穫逓増に従っているケースに応用できる。

まず $y_1$ の生産が収穫不変で，$y_2$ の生産が収穫逓減的であれば，

$$DB=BG \quad \text{のとき} \quad EB<BF$$

より，明らかに前と同じ結論，すなわち，$y_1$ の生産を同単位ずつ増加していくときに，$y_2$ の生産を累積的に大きな規模で減少しなければならないという結論が，ひきだされる。

また，$y_1$ が収穫一定で $y_2$ が収穫逓増のケースでは，

$$DB=BG, \quad EB<FB$$

は，$y_1$ がどのように生産規模を縮少するかについて明らかにしない。従って生産物の限界代替率は逓減的な場合も逓増的な場合もあるだろう。

次に $y_1$ も $y_2$ も収穫逓減的なケースでは，$y_1$ の産出レベルを等間隔で拡大するということは，第4図で

$$DB<BG$$

となるように $aa$, $bb$, $cc$ 曲線を定めることであるから，明らかに

$$BK<BD<BG<BL$$

となって，前と同じく $BF:BE=BL:BK$ より，

$$BE<BF$$

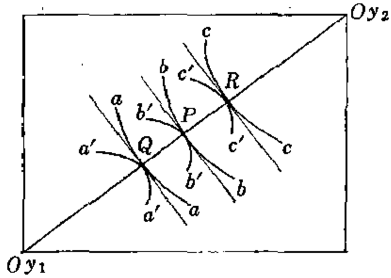
が成立し，この式は，（収穫逓減に従っている）$y_2$ 財の生産において，産出レベルの $BC$ 隔差が $AB$ 隔差よりずっと大きいことを意味している。従って限界代替率はより大きな程度に逓増的であろう。

次に $y_1$, $y_2$ とも収穫逓増的ケースでは，$y_1$ が収穫一定，$y_2$ が収穫逓増的なケースと同じ結論に至ることが推論されよう。

第5図は 2) の イ）要素集約度が等しく，両方とも収穫一定のケースをとりあげたものである。$QP=PR$ にとって，$y_1$ の生産を同じ間隔で拡大した時，$y_2$ の生産は $QP=$

$PR$ より同じ間隔で縮少していることがわかる。すなわち２財の生産物限界代替率は一定なのである。あるいは，生産可能性曲線が右下りの直線であると言ってもよい。

$y_1$ が収穫一定で $y_2$ が収穫逓減〔収穫逓増〕のケースでは，$y_1$ の生産を $QP=PR$ で拡大したとき，$y_2$ の生産が $QP=PR$ で縮少することは，$y_2$ の産出レベルが等間隔以上〔以下〕に縮少したことを意味するから，２財の限界代替率が逓増的〔逓減的〕であることがわかる。




第 5 図

次に両方とも収穫逓減，〔収穫逓増〕に従うケースでは，$QP<PR$ [$QP>PR$] にとって考えてみればよい。定式の結論が証明されることは容易にわかるであろう。

以上で２要素→２生産物の定式の証明は終った。この定式を多数財の場合に一般化しておこう。

〔仮定〕

任意の２生産要素の限界代替率が逓減的な生産関数が与えられたときに，

〔定式〕

各財の生産における要素集約度がそれぞれ異なっていても，等しい場合を含んでいても，任意の財の生産について収穫非逓増が支配していれば，生産物の変形関数は限界代替率逓増（生産可能性曲面は原点に凹）である。

収穫逓増を含むケースにおいては，変形関数は限界代替率逓増となるとは限らない。

〔以上〕

## 参 考 文 献


1. Bator, "Simple Analitics of Welfare Maximization", *AER*, Mar. 1957.
2. Black, "A Formal Proof of the Concavity of the Production Possibility Frontier", *EJ*, Mar. 1957.
3. Graaff, *Theoretical Welfare Economics*, Cambridge, 1957.
4. Houck, "On the Shape of the Production Possibility Function—A Delayed Comment", *EJ*, June 1966.
5. 黒岩洋昌「厚生経済理論」，創文社，1967。